Probabilités : Variables aléatoires, loi de Bernoulli

Voici quelques exercices d'échauffement pour se remettre dans le bain...

Exercice 7.1 Dans une classe de 35 élèves, le club théâtre (T) compte 10 élèves et la chorale (C) 12 élèves. Dix-huit élèves ne participent à aucune de ces activités. On interroge au hasard un élève de cette classe. faire un diagramme de Venn (avec des ensemble) représentant la situation :

Quelle est la probabilité que cet élève :

(a) appartienne au club théâtre ou à la chorale ? - en maths, "ou" signifie l'un, ou l'autre, ou les deux -

(b) appartienne au club théâtre et à la chorale ?

Exercice 7.2 Une urne contient deux boules blanches et quatre boules noires, toutes indiscernables au toucher.
1) On tire successivement, au hasard, trois boules sans remise. Quelles sont les probabilités des événements :
Faire un arbre de probabilités

- A : ”Le tirage ne contient aucune boule blanche”
  .....
  .....
  .....
  .....
  .....
- B : ”le tirage contient une seule boule blanche”
  .....
  .....
  .....
  .....
  .....
- C : ”Le tirage contient deux boules blanches”
  .....
  .....
  .....
  .....
  .....

2.a) Mêmes questions dans le cas d’un tirage avec remise.
Faire un arbre de probabilités

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

2.b) A-t-on $P(A) + P(B) + P(C) = 1$? Pourquoi ?

1. Notion de variable aléatoire

Définir une **variable aléatoire**, c'est associer à chaque événement la probabilité que cet événement arrive. En général, on représente cela dans un tableau appelé "loi de probabilité", avec sur la première ligne les événements, et sur le deuxième sa probabilité.
C'est pareil sur votre calculatrice, sauf que c'est disposé en colonnes : première colonne les événements, deuxième leur probabilité.

Exercice 7.3 On lance un dé à six faces.

- Si le résultat est 6, on gagne 2€
- Si le résultat est pair et inférieur strictement à 6 on ne gagne ni ne perd rien
- Sinon on perd 1€

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique (c'est-à-dire positif ou négatif) du joueur. On a alors (ce tableau est un tableau préparatoire, ce n'est pas encore la "loi de probabilité") :

Issue	1	2	3	4	5	6
Valeur de X	.....	.....	.....	.....	.....	.....

On remarque que l'événement $(X = 2)$ est le même que l'événement "obtenir un 6". De même, l'événement $(X = 0)$ est le même que l'événement "obtenir un 2 ou un 4". On peut donc définir un événement en utilisant la variable aléatoire X.

La **loi de probabilité** de la variable aléatoire sera donnée dans le tableau suivant :

.

Valeur x_i de X	-1	0	2
$p(X = x_i)$	.....	.....	.....

Exercice 7.4 On lance quatre fois une pièce de monnaie équilibrée. N est la variable aléatoire donnant le nombre de "face" obtenu. Déterminez la loi de probabilité de N.

.....
.....
.....
.....
.....

2. Paramètres d'une variable aléatoire

A. Définitions : espérance, variance, écart-type

Définition 7.1 Soit une loi de probabilité

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

- On appelle espérance le réel $E(X)$ défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

- On appelle variance le réel positif $V(X)$ défini par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \Big(x_i - E(X)\Big)^2$$

- On appelle écart-type le réel positif $\sigma(X)$ défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Interprétation et "trucs" mnémotechniques :
L'espérance mathématique d'une variable aléatoire réelle est l'équivalent en probabilité de ce qu'est **la moyenne** d'une série statistique en statistiques.
La variance et l'écart-type sont des mesures de dispersion.
La **variance** peut être vue comme "**la moyenne des carrés des écarts à la moyenne**" (rigoureusement : l'espérance des carrés des écarts à l'espérance).
La deuxième expression de la variance proposée dans la propriété peut être vue comme la "moyenne des carrés moins le carré de la moyenne".
Schéma :

Exemple 7.1 Reprise de l'exercice 7.4.

$E(X) = (-1) \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$ $\qquad$ $V(X) = \frac{41}{36}$ $\qquad$ $\sigma(X) = \sqrt{\frac{41}{36}} = \frac{\sqrt{41}}{36}$

Prise de notes sur le mode d'emploi de votre calculatrice pour retrouver ces valeurs d'espérance, de variance et d'écart-type :

.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....

Exercice 7.5 Aymeric a oublié le code du cadenas de son ordinateur. Ce code est constitué de quatre chiffres entre 0 et 9. Il ne se souvient que du premier : 2. Il essaie au hasard une combinaison commençant par 2. X désigne la variable aléatoire indiquant le nombre de chiffres bien placés (premier chiffre compris).
1) Quelle est la loi de probabilité de X ?
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
2) Calculez $E(X)$ et $V(X)$.
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Exercice 7.6 Dans une enveloppe, on place cinq jetons indiscernables portant les numéros -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2. On tire au hasard un jeton. A chaque jeton, on associe le carré du numéro tiré.
On définit ainsi une variable aléatoire C.
1) Quelle est la loi de probabilité de C ?
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
2) Calculez l'espérance et la variance de C.
.....
.....
.....
.....
.....
.....

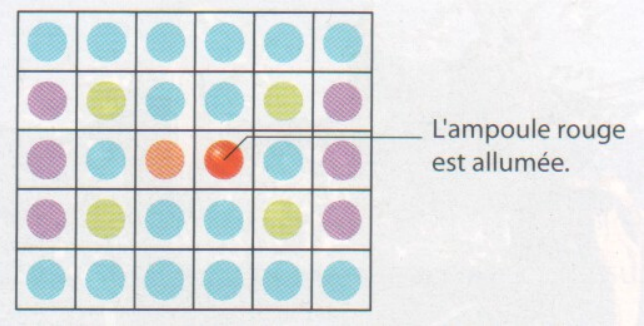
Exercice 7.7 Une salle de spectacles propose pour la saison une carte d'adhérent au prix de 100 €. Elle donne alors droit à un tarif unique de 15€ pour chacun de ses spectacles. Une étude statistique a montré que parmi les abonnés, 9% ont assisté à quatre spectacles, 12% à cinq, 36% à six, 18% à sept et le reste à huit spectacles.
On interroge au hasard un abonné sur le nombre de spectacles N auquel il a assisté.
1) Donnez la loi de probabilité de la variable aléatoire N, puis calculez $E(N)$.
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

2) On note S la variable aléatoire indiquant la somme déboursée par un abonné par saison.

(a) Quelle relation lie S et N ?

(b) Sur quelle dépense moyenne par abonné peut compter le directeur de la salle ?

Exercice 7.8 Un jeu de hasard est constitué d'un dispositif allumant de façon aléatoire une case, et une seule, d'un tableau lumineux dont les ampoules sont rouges (R), vertes (V), bleues (B) ou violettes (I).



L'exploitant donne au client un jeton, servant à actionner le mécanisme, dont il peut fixer à sa guise la valeur a en euros. Le joueur gagne 80€ si le rouge clignote, 50€ si c'est le vert, rien du tout s'il s'agit du violet, et perd 10 fois la valeur du jeton si c'est le bleu. X est la variable aléatoire donnant le gain algébrique en euros du joueur pour une partie.

1) Trouvez la loi de probabilité de X.

2.a) Calculez a pour que le jeu soit équitable (un jeu est dit "équitable" si l'espérance est nulle).

2.b) Comment l'exploitant a-t-il intérêt à fixer la valeur a du jeton ?

Exercice 7.9 Une marque de téléphone portable propose deux options sur ses appareils, le GPS (noté G) et le wifi (noté W). Sur l'ensemble de sa gamme, 40% des téléphones possèdent l'option G, 70% l'option W et 24% les deux à la fois. On choisit au hasard un téléphone portable de cette marque. On suppose que tous les appareils ont la même probabilité d'être choisis.

1.a) Calculez $P(G \cup W)$.

1.b) Déduisez-en la probabilité qu'un téléphone n'ait aucune des deux options.

2) Pour le fabricant, le coût de revient par téléphone de l'option G est de 12€, et celle de l'option W de 6€. On note X la variable aléatoire qui indique ce coût par appareil.

2.a) Déterminez la loi de probabilité de X.

2.b) Calculez $E(X)$.

2.c) Déduisez-en une estimation du coût de revient total de l'équipement de 200 000 appareils dans les mêmes conditions.

3. Indépendance

Intuitivement, deux expériences sont *indépendantes* si le résultat de l'une d'elle n'influence pas le résultat de l'autre.

Propriété 7.1 Lorsque deux événements sont indépendants (et uniquement dans ce cas), on a :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Exercice 7.10 Dans une classe de 30 élèves, 10 font partie du club photo et 6 sont membres du club théâtre. Enfin, deux élèves sont membres de ces deux clubs.
On interroge un élève de la classe, pris au hasard.
Montrer que les événements C "l'élève fait partie du club photo" et T "l'élève fait partie du club théâtre" sont indépendants.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Exercice 7.11 Une usine d'horlogerie fabrique une série de montres. Au cours de la fabrication peuvent apparaître deux types de défauts, désignés par A et B, indépendants l'un de l'autre. 2% des montres fabriquées présentent le défaut A, et 10% le défaut B.
Une montre est tirée au hasard dans la production. On définit les éléments suivants :

- A : "La montre présente le défaut A"
- B : "la montre présente le défaut B"

1. Montrer que la probabilité que la montre tirée ne présente aucun des deux défauts est égale à $0,882$.
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
2. Déterminer la probabilité que la montre présente au moins un défaut.
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
3. Déterminer la probabilité que la montre présente un et un seul des deux défauts.
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....

Exercice 7.12 On lance deux fois de suite un dé équilibré et on s'intéresse à l'événement A : « le nombre obtenu est divisible par 3 ».
Les deux lancers sont **indépendants** l'un de l'autre : lors du deuxième lancer, le dé ne se "souvient" pas du score qu'il a fait au premier lancer...
On peut représenter cette situation par un arbre où on note A_i l'événement « au tirage i le résultat est divisible par 3 ».
Représenter la situation par un arbre pondéré :

Dans un arbre pondéré représentant la répétition d'expériences aléatoires,
la probabilité d'un « chemin » est l**e produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin**.
Grâce à l'arbre ci-dessus, calculer la probabilité d'obtenir deux multiples de 3 à la suite l'un de l'autre.

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

4. Épreuves de Bernoulli

Définition 7.2 On appelle *épreuve de Bernoulli* de paramètre *p* toute épreuve aléatoire admettant exactement deux issues.

- l'une appelée *succès*, dont la probabilité d'apparaître est *p*
- l'autre appelée *échec*, dont la probabilité d'apparaître est *1-p*

La loi de Bernouilli est donc résumée dans le tableau suivant (on note 0 l'échec et 1 le succès) :

x_i	0	1
$p(X = x_i)$	$1-p$	p

On dit que la variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre *p* et on note $X \sim \mathscr{B}(p)$.

Propriété 7.2 Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p. Alors :

$$E(X) = p \quad ; \quad V(X) = p \times (1-p) \quad ; \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{p \times (1-p)}$$

Exercice 7.13 On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes, en espérant piocher un cœur.A-t-on une épreuve de Bernoulli, et si oui, quel est son paramètre ? Dessiner l'arbre.

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Exercice 7.14 Une famille est composée de 3 enfants dont 2 filles. lorsque le téléphone sonne, les enfants se précipitent pour décrocher.
On considère l'événement S :"c'est une fille qui va décrocher".
Expliquer pourquoi on a une épreuve de Bernoulli, et calculer $P(\overline{S}$. Dessiner l'arbre.

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

5. Répétition d'épreuves de Bernoulli

Exercice 7.15 Une commerciale démarche sa clientèle par téléphone. La probabilité qu'une personne appelée conclue un contrat est $0,4$. On note C l'événement "la personne appelée conclut un contrat". Elle téléphone successivement à trois personnes.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré

2. Calculer la probabilité que deux personnes concluent un contrat

3. Calculer la probabilité qu'aucune personne ne conclue un contrat

4. Calculer la probabilité qu'au plus deux personnes concluent un contrat

Exercice 7.16 Une urne contient 7 boules rouges, 5 boules noires et 3 boules vertes. On tire successivement 3 boules avec remise et, à chaque tirage, on note S l'événement "obtenir une boule noire". On note X la variable aléatoire comptant le nombre de boules noires obtenues.

1. Justifier qu'il s'agit d'une répétition d'épreuves de Bernoulli. Faire un arbre.

2. Déterminer la probabilité d'obtenir une seule boule noire à l'issue des trois tirages, c'est-à-dire $P(X = 1)$

3. Déterminer la probabilité $P(X \geqslant 1)$

4. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X

Exercice 7.17 Un exercice se présente sous la forme d'un QCM dans lequel figurent 4 questions. Pour chacune des questions, une seule réponse est exacte parmi les 4 proposées.

1. Si on trace un arbre représentant la situation, combien y a-t-il de branches ?

2. Déterminer la probabilité qu'un élève qui cocherait au hasard les réponses obtienne 4 bonnes réponses.

3. Déterminer la probabilité qu'un élève qui cocherait au hasard les réponses obtienne au moins 2 bonnes réponses.

Exercice 7.18 On suppose qu'à la naissance, la probabilité d'avoir un garçon est égale à celle d'avoir une fille. Une femme décide d'avoir 3 enfants. On s'intéresse à la probabilité d'avoir 3 garçons.

1. Expliquer pourquoi on peut modéliser les 3 naissances par une répétition d'épreuves de Bernoulli

2. Tracer l'arbre correspondant

3. Répondre à la question.

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .